Über reguläre Variationsprobleme.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Bekanntlich ist der sogenannte DU BOIS REYMONDsche Einwand in der Theorie der Doppelintegrale tiefgreifender als in der Theorie der einfachen Integrale. Während man nämlich bei den letzteren mit Hülfe des DU BOIS REYMONDschen Lemmas zeigen kann, dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion (unter recht allgemeinen Voraussetzungen über den Integranden des Variationsproblems) eine stetige zweite Ableitung besitzt und daher die EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung erfüllt, so gilt der entsprechende Satz für Doppelintegrale nicht. Auf diesen wichtigen Umstand hat zuerst Herr HADAMARD hingewiesen;[1]) er zeigte (an der Hand eines sehr einfachen Beispiels), dass die erste Variation eines Doppelintegrales verschwinden kann, ohne dass die entsprechende Extremalfunktion zweite Ableitungen besitzen müsste. Da damit die übliche EULER-LAGRANGEsche Differentialgleichung hinfällig wird, so entstand das Problem, das Verschwinden der ersten Variation in anderer Weise in Gleichungen umzusetzen.

Diese Frage behandelte ich in einer Arbeit im *Journal für die re.ne und angewandte Mathematik*[2]) durch Heranziehung eines

[1]) *Comptes Rendus* Bd. 144, S. 1092—1093. Ein anderes Beispiel, — wo es sich sogar um ein reguläres Variationsproblem handelt — gab L. LICHTENSTEIN, *Math. Ann.* Bd. 69, S. 514—516.

[2]) Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 149, S. 1—18. — Einen einfachen Beweis (nebst Anwendungen auf die Hydrodynamik) des genannten Hülfsatzes gab L. LICHTENSTEIN in seiner Arbeit: Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik (*Annales de la société polonaise de mathématique* 1924, S. 20—28). — Auf Variationsprobleme mit variierender Begrenzungslinie wurden meine Resultate von E. GERGELY in seiner Dissertation angewandt (Über die Variation von Doppelintegralen mit variierender Be-

Hülfssatzes, dem — wie mir scheint — in der Theorie der Doppelintegrale dieselbe Rolle zukommt, wie dem Du Bois Reymondschen Lemma bei den einfachen Integralen. Für Variationsprobleme von der Form

$$\iint\limits_{G} f(p, q, x, y)\, dx\, dy \quad \left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = p, \ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = q\right)$$

(bei vorgeschriebenen Randbedingungen) bewies ich, *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen,* dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion in Gemeinschaft mit einer stetig differenzierbaren Hülfsfunktion $Z(x, y)$ die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right).$$

befriedigt, und einen entsprechenden Satz für den Fall, dass im Integranden des Variationsproblems die unbekannte Funktion auftritt.

Dieses Resultat führt in natürlicher Weise auf den Gedanken, die weiteren Ergebnisse der Variationsrechnung, die man in der klassischen Theorie gestützt auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung 2. Ordnung entwickelt, auf Grund meines oben angegebenen Differentialgleichungsystems erster Ordnung abzuleiten, womit der Vorteil verbunden ist, dass die gewonnenen Sätze für alle Extremalfunktionen, nicht nur für die zweimal differenzierbaren gelten. Aus diesem Gedanken entsprang die vorliegende Note, in der ich mich mit regulären Variationsproblemen der obigen Form beschäftige; es zeigt sich, dass die Sätze, die man auf Grund meines Gleichungssystems gewinnt, keineswegs komplizierter sind als die entsprechenden, die sich aus der üblichen Euler-Lagrangeschen Gleichung ergeben, an Allgemeinheit aber umfassender sind,

---

grenzungslinie, *diese Acta* Bd. II, S. 139—146). — T. Radó bewies (Über den analytische Charakter der Minimalflächen, *Math. Zeitschrift* Bd. 24, S. 321—327.) auf derselben Grundlage die Analytizität der Minimalflächen; derselbe leitete zwei andere Gleichungssysteme auf Grund meines Hülfsatzes für die Extremalfläche ab (Bemerkungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta* Bd. II, S. 147—156). — Die entsprechenden Untersuchungen für dreifache Integrale wurden von A. Szücs durchgeführt (Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes, *diese Acta* Bd. III, S. 81—95) — Eine Erweiterung des genannten Hülfsatzes ist endlich eine wesentliche Stütze meiner Lösung des Plateauschen Problems. (Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.* Bd. 97, S. 124—158).

da die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion nirgends vorausgesetzt wird.

Auf Grund einer einfachen Bemerkung (vgl. **1.**), die die Verallgemeinerung eines bekannten STEINERschen Satzes über den Flächeninhalt auf reguläre Variationsprobleme ist, zeige ich (in **2.**), dass im Falle eines regulären Variationsproblems jede Lösung meines Differentialgleichungssystems ein absolutes Minimum des Variationsproblems liefert; daraus folgen (vgl. **3.**) bestimmte Eindeutigkeitssätze, die — wie mir scheint — auch in den allereinfachsten Fällen neu sind. In **4.** gebe ich endlich eine Anwendung auf das besondere aus dem PLATEAUschen Problem entspringende Differentialgleichungssystem.

1. Unsere Entwicklungen fussen auf der folgenden Bemerkung. Die Funktion

$$f(p, q, x, y)$$

möge für alle reellen Werte von p, q und für solche Werte von x, y definiert sein, die in einem von einer doppeltpunktlosen Kurve umrandeten Gebiet G der xy-Ebene liegen; wir nehmen an, dass die zweiten Ableitungen dieser Funktion nach p und q existieren und so beschaffen sind, dass die Ungleichungen[3])

$$f_{pp} > 0, \quad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \tag{1}$$

an jeder Stelle des Definitionsbereiches von $f(p, q, x, y)$ statthaben. Es sei ferner $z(x, y)$ irgendeine Funktion der beiden reellen Veränderlichen x, y, die im Gebiet G der xy-Ebene definiert und daselbst samt ihren ersten Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ stetig ist; wir betrachten das Integral

$$I[z] = \iint_G f(p, q, x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir die in Frage stehende Bemerkung wie folgt formulieren:

Sind $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei im Gebiet G definierte Funktionen, die samt ihren ersten Ableitungen

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$$

---

[3]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indices.

daselbst stetig sind, θ aber irgendeine zwischen 0 *und* 1 *gelegene Zahl,* $0 < \theta < 1$, *so gilt die Ungleichung*

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2] \leqq (1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2], \tag{3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthat, wenn die Differenz der beiden Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ konstant ist.

In der Tat, man findet — wenn man zur Abkürzung $(1-\theta)p_1+\theta p_2 = \bar{p}$, $(1-\theta)q_1+\theta q_2 = \bar{q}$ setzt — durch zweimalige Differentiation der Definitionsgleichung

$$\varphi(\theta) = I[(1-\theta)z_1+\theta z_2] =$$
$$= \iint\limits_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,\, (1-\theta)q_1+\theta q_2,\, x, y\big)\, dx\, dy$$

nach θ:

$$\varphi'(\theta) = \iint\limits_G \Big\{ f_p(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1) + f_q(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1) \Big\}\, dx\, dy \tag{4}$$

und

$$\varphi''(\theta) = \iint\limits_G \Big\{ f_{pp}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)^2 +$$
$$+ 2f_{pq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)(q_2-q_1) + f_{qq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1)^2 \Big\}\, dx\, dy.$$

Zufolge der Ungleichungen (1) ist der Integrand stets nicht-negativ und nur dann Null, wenn

$$p_1 = p_2 \text{ und } q_1 = q_2$$

ist. Es ist daher für jedes θ

$$\varphi''(\theta) \geqq 0, \tag{3'}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthaben kann, falls überall in G $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ ist, d. h. die Differenz der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ eine Konstante ist. In diesem trivialen Falle ist für jedes θ

$$\varphi''(\theta) = 0,$$

also ist $\varphi(\theta)$ eine lineare Funktion von θ, d. h. es ist

$$\varphi(\theta) = (1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1),$$

woraus unmittelbar

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2] = (1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2]$$

folgt. Schliessen wir diesen Fall aus, so drückt die nunmehr leicht ableitbare Ungleichung

$$\varphi(\theta) < (1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1) \text{ für } 0 < \theta < 1,$$

die mit unserer Behauptung (3) identisch ist, die geometrische Tatsache aus, dass bei einer nach unten konvexen Kurve jeder

Kurvenbogen unterhalb der die Endpunkte verbindenden Sehne liegt. Analytisch folgt dies aus der Bemerkung, dass die Funktion

$$\varphi(\theta) \quad (1-\theta)\varphi(0)-\theta\varphi(1),$$

die für $\theta=0$ und $\theta=1$ verschwindet, innerhalb des Intervalles $0\leqq\theta\leqq 1$ nirgends positiv oder Null sein kann, da sie im entgegengesetzten Fall an einer *inneren* Stelle dieses Intervalls einen Maximum haben müsste, was aber mit der soeben für alle diese θ abgeleiteten Ungleichung $\varphi''(\theta)>0$ im Widerspruch steht.

Damit ist unsre Ungleichung (3) bewiesen, d. h. es ist für $0\leqq\theta\leqq 1$

$$\iint_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,\,(1-\theta)q_1+\theta q_2,\,x,y\big)\,dx\,dy\leqq$$
$$\leqq(1-\theta)\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\theta\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\,dx\,dy.$$

Insbesondere ergibt unsere Bemerkung für $\theta=\frac{1}{2}$ das Resultat

$$I\left[\frac{z_1+z_2}{2}\right]\leqq\frac{1}{2}\,(I[z_1]+I[z_2]),$$

oder

$$\iint_G f\left(\frac{p_1+p_2}{2},\,\frac{q_1+q_2}{2},\,x,\,y\right)dx\,dy\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left(\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\right)dx\,dy.$$

Wählt man

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist die Ungleichung (1) offenbar erfüllt und das Integral (2) stellt den Flächeninhalt des über G gelegenen Teiles der Fläche $z=z(x,y)$ dar. Die letzte Ungleichung drückt alsdann eine wohlbekannte, von STEINER[4]) bewiesene Eigenschaft des Flächeninhaltes aus, und unsere soeben abgeleitete Ungleichung (3) ist eine Verallgemeinerung dieses STEINERschen Satzes auf reguläre Variationsprobleme.

2. Auf Grund der vorangehenden Bemerkung können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Die im Gebiet G definierten Funktionen

$$z(x,y) \text{ und } Z(x,y),$$

---

[4]) Gesammelte Werke S. 298.

die samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von x, y sind, mögen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \qquad (5)$$

sein; alsdann liefert $z(x, y)$ ein absolutes Minimum des Variationsproblems

$$\iint\limits_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei festen Randbedingungen, d. h. es gilt die Ungleichung

$$\iint\limits_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy < \iint\limits_G f\left(\frac{\partial \bar z}{\partial x}, \frac{\partial \bar z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy$$

für jede von $z(x, y)$ verschiedene Funktion $\bar z(x, y)$, die auf dem Rande von G dieselben Randwerte annimmt wie $z(x, y)$.

Zum Beweis betrachten wir unsere Funktion

$$\varphi(\theta) = I[(1-\theta)z + \theta \bar z];$$

da — wie wir soeben gesehen haben — für jeden im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 1$ gelegenen Wert von θ die zweite Ableitung $\varphi''(\theta) > 0$ ist,[5]) so ist für $0 < \theta \leqq 1$

$$\varphi(\theta) > \varphi(0) + \varphi'(0)\theta,$$

insbesondere für $\theta = 1$

$$\varphi(1) > \varphi(0) + \varphi'(0). \qquad (6)$$

Die Gleichung (4) ergibt aber, wenn man z_1 durch z und z_2 durch $\bar z$ ersetzt und zur Abkürzung $z(x, y) - \bar z(x, y) = \zeta(x, y)$ einführt, die Relation

$$\varphi'(0) = \iint\limits_G \left\{ f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} dx\, dy,$$

die mit Rücksicht auf das Differentialgleichungssystem (5) auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$\varphi'(0) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dx\, dy. \qquad (7)$$

In dieser Formel sind $Z(x, y)$ und $\zeta(x, y)$ in G definierte samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, von denen die zweite,

---

[5]) Da z und $\bar z$ verschiedene Funktionen sind, die auf dem Rande von G übereinstimmen, so kann die Differenz dieser Funktionen keine Konstante sein; es gilt daher die Ungleichung (3') mit Ausschluss des Gleichheitszeichens.

$\zeta(x, y)$ auf dem Rande dieses Gebietes verschwindet. Man kann nun unschwer zeigen, dass das Integral (7) gleich Null ist. In der Tat, wenn die Funktion $Z(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar ist, so folgt unsere Behauptung unmittelbar durch Produktintegration, da

$$\iint_G \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\, dy = \iint_G \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\, dy = -\iint_G \zeta \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dx\, dy$$

ist. Besitzt aber $Z(x, y)$ keine Ableitungen zweiter Ordnung, so approximiere man diese Funktion durch eine Folge zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, etwa durch eine Polynomfolge

$$Z_1(x, y),\ Z_2(x, y), \ldots, Z_n(x, y), \ldots$$

von der Art, dass gleichmässig in G die Limesgleichungen

$$\lim_{n \to \infty} Z_n(x, y) = Z(x, y),$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}$$

statthaben. Es ist sodann

$$\iint_G \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_G \left\{ \frac{\partial Z_n}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z_n}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} dx\, dy = 0,$$

womit das Verschwinden des Integrals (7) in allen Fällen bewiesen ist. Es ist daher $\varphi'(0) = 0$ und die Ungleichung (6) zeigt, dass $\varphi(1) > \varphi(0)$ ist, d. h. es ist

$$I[\bar{z}] > I[z]$$

und dies ist der oben ausgesprochene Satz.

3. Mit Hilfe der Ungleichungen (3) können wir nun zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen *das Variationsproblem*

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen nur eine Lösung besitzen kann.

Sind nämlich $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei verschiedene im Gebiet G definierte, samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, die beide auf dem Rande dieses Gebietes die gegebenen Randwerte besitzen und dem obigen Integral denselben Wert m erteilen:

$$I[z_1] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy =$$

$$= I[z_2] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy = m,$$

so ist nach Ungleichung (3)

$$I[(1-\theta) z_1 + \theta z_2] < (1-\theta) I[z_1] + \theta I[z_2] = m.$$

Die Ungleichung gilt in der schärferen Form (mit Ausschluss des Gleichheitszeichens), da zufolge unserer Annahmen die Differenz $z_1 - z_2$ nicht konstant sein kann. Da ferner die Funktion

$$(1-\theta) z_1 + \theta z_2 = z_1 + \theta (z_2 - z_1)$$

dieselben Randwerte besitzt wie z_1 und z_2, so folgt aus der letzten Ungleichung, dass m nicht der Minimalwert des betrachteten Integrals bei den gegebenen Randwerten sein kann, womit unsere Behauptung (dass der Minimalwert dem Integral nicht durch zwei Funktionen der Konkurrenz erteilt wird) bewiesen ist.

Durch Kombination dieses Satzes mit dem in **2.** gewonnenen Resultat gelangt man zu dem folgenden Eindeutigkeitssatz:

Es erfülle $f(p, q, x, y)$ die in **1.** *angegebenen Bedingungen; wir nehmen an, dass die Funktionenpaare*

$$z_1(x, y) \text{ und } Z_1(x, y)$$

bzw.

$$z_2(x, y) \text{ und } Z_2(x, y)$$

(von denen nur einmalige Differenzierbarkeit nach x un y vorausgesetzt wird) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \tag{5}$$

befriedigen, ferner, dass die Randwerte der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ in jedem Randpunkte von G übereinstimmen; dann gilt für jede Stelle in G

$$z_1(x, y) = z_2(x, y)$$

und

$$Z_1(x, y) - Z_2(x, y) = konst.$$

Dieser Satz ist — wie mir scheint — schon für den Fall eines linearen Differentialgleichungssystems neu. Setzt man nämlich

$$f(p, q, x, y) = \frac{1}{2}\{a(x, y) p^2 + 2b(x, y) pq + c(x, y) q^2\},$$

wo $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ in G definierte stetige Funktionen bedeuten, die die Ungleichung

$$a(x, y)\, c(x, y) - (b(x, y))^2 > 0$$

befriedigen, so erfüllt $f(p, q, x, y)$ die geforderten Bedingungen unseres Satzes. *Für das lineare Differentialgleichungssystem*

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = b(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

gilt daher der Eindeutigkeitssatz, d. h. wenn man auf dem Rande von G die Randwerte von $z(x, y)$ vorschreibt, so kann es höchstens eine samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $z(x, y)$ mit diesen Randwerten geben, die das zuletzt angeschriebene Differentialgleichungssystem befriedigt und die zugehörige Funktion $Z(x, y)$ ist bis auf einen konstanten Addenden eindeutig festgelegt.

Aus den bekannten Eindeutigkeitssätzen der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen würde dieser Satz nur dann folgen, wenn man ausser der Differenzierbarkeit der Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ auch die Existenz der zweiten Ableitungen von $z(x, y)$ voraussetzen würde. Es wäre auch vom Interesse, diesen Eindeutigkeitssatz (ohne diese Einschränkungen) auf das allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\alpha(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+\beta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=\gamma(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+\delta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma>0$$

zu übertragen.

4. Wir nehmen jetzt an, dass die Funktion f nur die Variablen p und q enthält (von x und y aber unabhängig ist) und dass für alle Werte der Veränderlichen p, q die Ungleichungen

$$f_{pp}>0, \quad f_{pp}f_{qq}-f_{pq}^2>0 \tag{1}$$

erfüllt sind. Wir zeigten in **2.**, dass jede nach x und y stetig differenzierbare Lösung $z(x, y)$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5}$$

ein absolutes Minimum für das Integral

$$\iint_G f\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

liefert, wenn zur Konkurrenz diejenigen Funktionen $\bar{z}(x, y)$ zugelassen werden, die in G samt ihren ersten Ableitungen stetig sind und auf der Berandung von G dieselben Randwerte wie $z(x, y)$ annehmen. Für die Extremalfunktionen dieses Variationsproblems beweis aber T. Radó,[6]) in Anlehnung an meine in der Einleitung genannten Arbeit, dass sie in Gemeinschaft mit zwei weiteren Hilfsfunktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ (die in G ebenfalls einmal stetig

[6]) *Diese Acta* Bd. II, S. 147—156.

differenzierbar sind) die folgenden zwei Differentialgleichungssysteme befriedigt:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x} f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial x} f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5'}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial y} f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y} f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{5''}$$

Daraus folgt nun, dass, falls die Funktion $f(p, q)$ die Ungleichung (1) erfüllt, jede Lösung des Systems (5) auch Lösung der Differentialsysteme (5′) und (5″) ist. Diese Tatsache ist deshalb vom Interesse, da man diese letzten Gleichungen aus den Gleichungen (5) nur dann durch einfaches Umrechnen ableiten kann, falls man die zweimalige Differenzierbarkeit von $z(x, y)$ voraussetzt; auch bleibt es fraglich, ob ohne diese Annahme die Radóschen Gleichungen aus meinen Gleichungen (5) auch in dem Falle ableitbar sind, wo die Ungleichung (1) nicht erfüllt ist.

Als Anwendung dieser Betrachtungen beweisen wir noch den folgenden Satz.

Es seien $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ in G definierte einmal stetig differenzierbare Funktionen von x, y, die das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \tag{8}$$

befriedigen; dann sind $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ analytische Funktionen von x und y.

Dieser Satz — ein vollkommenes Analogon der bekannten Tatsache, dass die stetig differenzierbaren Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen analytisch sind — ist eine unmittelbare Folge eines schönen Satzes von T. Radó über den analytischen Charakter der Minimalflächen.[7]) Setzt man nämlich

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist offenbar die Ungleichung (1) erfüllt und es gehen die Gleichungen (5) in das System (8) über. Zufolge der soeben gemachten Bemerkung folgt dann die Existenz zweier Hülfsfunktionen (mit

[7]) Vgl. die in der Anmerkung [2]) genannten beiden Arbeiten dieses Verfassers.

stetigen ersten Ableitungen) $\omega_1(x, y)$ und $\omega_2(x, y)$, die gemeinsam mit $z(x, y)$ die beiden Differentialsysteme

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8'}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8''}$$

befriedigen. T. Radó zeigt nun in der erwähnten Arbeit, dass jede in einem Gebiet einmal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y)$, welche zusammen mit drei Hilfsfunktionen $Z(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ die Gleichungen (8), (8′), (8″) befriedigt, analytisch ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 13. Oktober 1927.)